**Нули и Изолированные** **особые точки. ВЫЧЕТЫ**

**П.1. Нули аналитической функции**

Пусть функция  является аналитической в точке ****.

*Определение 1. Точка  называется* ***нулем аналитической функции*** *, если ее значение в этой точке равно нулю .*

*Определение 2. Точка* ****** *называется* ***изолированным нулем*** *функции********, если существует окрестность точки* *******, такая, что в этой окрестности нет других нулей.*

Если аналитическая функция не равна тождественно нулю, то она может иметь только изолированные нули.

*Определение 3. Точка  − называется н****улем - того порядк****а для аналитической функции , если , а .* (1)

Из определения следует, что порядок нуля функции определяется порядком первой отличной от нуля в этой точке производной.

В тех случаях, когда нахождение производных *k* - ого порядка затруднительно, можно определить порядок нуля функции, воспользовавшись разложением аналитической функции в ряд в окрестности точки ** −** нуля этой функции по формуле



В данном разложении обязательно , т.к. , но могут и другие первые коэффициенты разложения быть равны нулю.

Если , а , то  − называется  **простым** нулем (нуль первого порядка).

Если , , то тогда ** −** является **нулем** ****− порядка**.

В общем виде разложение аналитической функции  в окрестности нуля **− порядка можно преобразовать к виду:





или ,

где  **−** аналитическая функция, .

Легко увидеть, что

 (2)

При исследовании порядка нуля для функции **** по этим формулам достаточно верно подобрать значение .

Отдельно следует рассмотреть бесконечно удаленную точку.

Пусть функция  является аналитической в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки .

*Определение 4. точка  называется* ***нулем - порядка*** *функции , если разложение этой функции в окрестности точки 0 в ряд Лорана содержит бесконечное множество членов с отрицательными степенями, начиная с члена *

*Пример 1.*  Исследовать порядок нулей функции.

*Решение.* Найдем нули функции, это корни уравнения :

 и .

Исследуем порядок нулей по определению.

, . Таким образом, числа  являются нулями первого порядка или простыми нулями функции. Для числа 0 продолжаем исследовать., следовательно, - нуль второго порядка.

*Пример 2.*  Исследовать порядок нулей функции .

*Решение.* Решим уравнение . Корни уравнения:

а)  и б) . Определим порядок нулей по формуле (2).

а) Для 

=, т.е.  не подходит,

=, т.е.  подходит.

Точка  − является нулем второго порядка.

б) .

,

т.е. 

Точки  являются простыми нулями для функции .

**П.2. Изолированные особые точки**

**Особыми точками** функции  называют точки, в которых функция не является аналитической или точки, где функция не определена.

*Определение. Точка  называется* ***изолированной особой точкой*** *функции , если  − однозначная и аналитическая функция в круговом кольце , кроме самой точки  (т.е. существует окрестность точки , в которой нет других особых точек).*

Исследование функции в особой точке  определяется ее поведением в окрестности этой точки.

В окрестности изолированной особой точки  за исключением её самой функция  разложима в ряд Лорана: , который сходится в кольце *.*

**Классификация особых точек.**

1. изолированная особая точка функции называется **устранимой особой точкой,** если  − существует и конечен.
2. изолированная особая точка функции называется **полюсом**, если .
3. изолированная особая точка функции называется **существенно особой** **точкой**, если  − не существует.

Классификацию особых точек можно также проводить в соответствии с различными вариантами **соотношения положительных и отрицательных степеней** разложения функции в ряд Лорана.

**(I)** Если в разложении в ряд Лорана **отсутствуют члены с отрицательными** **степенями (**нет главной части), т.е. имеет место равенство ,то **особая точка ** называется **устранимой особой точкой.**

*Пример 1.*  Исследовать характер особой точки функции 

*Решение.* Функция не определена, когда знаменатель равен нулю.  − особая точка функции.

Определим вид особой точки по определению, , следовательно,  устранимая особая точка.

Можно определить вид особой точки иначе. разложим числитель в ряд Тейлора в окрестности особой точки , используя готовое разложение для функции , далее подели полученное равенство на *z*, получим:

.

В разложении отсутствуют члены в отрицательной степени. Следовательно, особая точка  − устранимая особая точка.

**(II)** Если в разложении в ряд Лорана присутствует  ** конечное число членов с отрицательными степенями** (в главной части), то **особая точка ** называется **полюсом -того порядка.**

При  точка  называется **простым** полюсом.

Порядок полюса можно так же определить, пользуясь следующим методом.

Пусть - полюс, тогда разложение функции  в ряд Лорана в окрестности ****

имеет вид



Преобразуем правую часть равенства к следующему виду:

****

****

****

Выразим из последнего равенства и перейдем к пределу. Получим удобную формулу, для определения порядка полюса. Если выполняется равенство

****

*Пример 2.*  Исследовать характер особой точки функции .

*Решение.*  Особая точка . Для данной функции  − неопределенность. Определим вид особой точки.

**1 способ.**

раскладывают числитель в ряд в окрестности особой точки , используя готовое разложение для функции :

 

В полученном разложении есть конечное число членов с отрицательным показателем, следовательно,  точка полюса. Порядок полюса определяем наибольшей отрицательной степенью *z.* Наибольшая отрицательная степень − вторая. Следовательно,  − полюс второго порядка.

**2 способ.**

Подбирают степень  для выполнения соотношения

.

, при ,

т.е. это полюс второго порядка.

***Замечания.***При определении характера изолированной особой точки можно также использовать следующие утверждения:

**1)** Для того чтобы точка  являлась **полюсом − порядка** аналитической функции , необходимо и достаточно, чтобы функцию  можно было представить в виде

,

где  − функция аналитическая в точке , причем .

2) Характер особой точки можно определить, используя функцию ****.

Если точка **** является **нулем  − порядка** для функции **,** то эта же точка **** будет полюсом  − порядка для функции .

*Пример**3.* Исследовать характер особых точек функции .

*Решение.*  Особыми точками функции являются точки .

**1 способ.** Функцию представим в виде , получим , где = для точки *z=i* и= для точки *z=-i* являются аналитическими в точках . Для каждой точки *k=1*, поэтому это полюсы первого порядка (простые полюсы).

**2 способ.** Можно провести исследование через функцию .

для функции  эти же точки  являются простыми нулями. Поэтому для исходной функции особые точки будут простыми полюсами.

**(III)** Если в разложении в ряд Лорана имеется бесконечное число членов с отрицательными степенями (в главной части), тогда **особая точка**  называется **существенно особой точкой** функции .

В этом случае в точке  не существует предела функции  и в бесконечно малой окрестности этой точки функция не определена.

*Пример 4.* Исследовать характер особых точек функции .

*Решение.* Особая точка .

**1 способ.** Исследуем по определению. Найдем предел функции в особой точке.

****

**2 способ.** Разложим функцию в ряд в окрестности точки 0, воспользовавшись рядом для функции . Получим: Так как в разложении в ряд Лорана имеется бесконечное число членов с отрицательными степенями, то  является существенно особой точкой.

**Для бесконечно удаленной точки  существует та же самая классификация изолированных точек, где , где .**

1) Если в разложении в ряд Лорана будут присутствовать только отрицательные степени, а положительных степеней вообще не будет, тогда  будет **устранимой особой точкой**.

2) Если число членов с положительными степенями будет конечно , то  будет **полюсом -того порядка.**

3) Если , то это будет **существенно особая точка.**

**П.3. Определение вычета**

Пусть  − аналитическая функция в некоторой области D, ограниченной произвольным кусочно-гладким замкнутым контуром .  − изолированная особая точка функции,  и контур не содержит внутри других особых точек функции , кроме самой точки .

*Определение.* ***Вычетом*** *аналитической функции  относительно ее изолированной особой точки  называется интеграл*

*, (3)*

*где   − замкнутый контур интегрирования, лежит в области аналитичности функции . направление интегрирования положительное.*

для изолированной особой точки  − обход против часовой стрелки, для  − по часовой стрелке.

При разложении функции в ряд Лорана в окрестности изолированной точки для коэффициентов ряда выполняются равенства

****,

Если в формуле коэффициентов взять *n=-1, то получим*

Таким образом, в**ычет аналитической функции  в изолированной особой точке равен коэффициенту  при первой отрицательной степени разложения функции  в ряд Лорана в окрестности этой точки**

 (4)

Для бесконечно удаленной точки :

 (5)

Если для функции  имеется разложение в ряд Лорана или это разложение не вызывает затруднений, то вычет функции находят по значению . Если разложение в ряд вызывает определенные трудности, то лучше воспользоваться следующими формулами.

**для каждого типа особых точек можно уточнить формулу вычета:**

**1)** Если ** − устранимая особая точка ,** то

; (6)

**2)** Если ** − полюс -го порядка ,** то

; (7)

**3)** Если ** − простой полюс** (), то

. (8)

Известно, что **для простого полюса ,** в остальных случаях вычет может быть равным или не быть равным нулю.

Если функция  в окрестности точки  представляет собой частное двух аналитических функций: , причем

, , 

(**** − простой полюс функции ****), то

. (9)

Если точка  есть существенно особая точка функции **, то вычет вычисляется по формуле (4) через разложение функции в ряд Лорана.

*Пример 1.* Найти вычеты в особых точках функции 

*Решение.* Особыми точками функции  являются точки ,  (бесконечно удаленную точку рассматривать не будем).

 − **простой полюс.** По формуле (8):



 − **полюс второго порядка**. По формуле (7):

.

*Пример 2.* Найти вычеты в конечных особых точках функции .

*Решение.*  является особой точкой для функции . Для определения ее вида раскладывают функцию в ряд в окрестности этой точки (сначала используют тригонометрическую формулу синуса суммы):



.

Разложение содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями. Следовательно, особая точка  – является существенно особой точкой. Вычет находят по формуле (4) как коэффициент при первой отрицательной степени в разложении функции в ряд

.

**Обобщенная теорема о вычетах**

**Сумма вычетов функции  во всех ее особых точках, включая бесконечно удаленную точку, равна нулю.**

 (10)

Используя эту теорему, вычет в бесконечно удаленной точке можно найти без дополнительных исследований:

 (11)

Например, в задаче 1 бесконечно удаленная точка является особой точкой функции и вычет в этой точке можно найти по формуле (11):

.

**П.4. Приложения теории вычетов к вычислению интегралов**

**Вычисление контурных интегралов**

Одним из основных в теории вычетов является их использование при вычислении интегралов **по замкнутому контуру** или **контурных интегралов.**

**Основная теорема Коши о вычетах.** *Если функция  является аналитической на границе Г области  и всюду внутри области, за исключением конечного числа изолированных особых точек однозначного характера*

*, , …, ; непрерывна вплоть до границы области, за исключением тех же точек, то*

** (12)

Граница области предполагается состоящей из конечного числа кусочно-гладких кривых, обход в положительном направлении.

*Пример 3.* Вычислить интеграл 

*Решение. .*Находим особые точки подынтегральной функции  и вычеты относительно тех особых точек, которые попадают внутрь контура интегрирования.

Функция  имеет две особые точки  и .

Внутрь контура   попадает только первая точка. Определим ее тип.

  точка  − полюс.

  − полюс 2 порядка



=.

Окончательно по основной теореме Коши о вычетах (12) получают:

.